

PROPOSTA DE CURSO DE VERÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO

TEORIA DA PROBABILIDADE

Martingais em tempo discreto, convergência e concentração

Natureza	Curso de pós-graduação em Matemática	Carga horária	60 horas, em 20 encontros de 3 horas
Público	Alunos de mestrado e doutorado; admite-se a participação de graduandos avançados	Texto-base	D. Williams, <i>Probability with Martingales</i>
Pré-requisito	Análise Real e maturidade na leitura e escrita de demonstrações	Proponente	Fabio Ramos

1. Apresentação

O curso propõe uma introdução rigorosa e abrangente à teoria moderna da probabilidade, tendo a teoria de martingais em tempo discreto como princípio organizador. A construção parte dos fundamentos de probabilidade em espaços de medida, desenvolve a esperança condicional e conduz aos teoremas de parada e convergência de Doob, aos teoremas-limite clássicos e a desigualdades de concentração. O objetivo é estabelecer uma base conceitual sólida para estudos posteriores em processos estocásticos, análise estocástica, estatística matemática e áreas afins.

2. Público e pré-requisitos

Trata-se de um curso de pós-graduação em Matemática. O público principal é formado por alunos de mestrado e doutorado. Alunos avançados de graduação poderão acompanhar o curso desde que tenham cursado Análise Real e demonstrem maturidade matemática, em particular familiaridade com argumentos de convergência e com a elaboração de demonstrações. Não se pressupõe um curso anterior de teoria da medida ou de processos estocásticos.

3. Objetivos

1. Formular a teoria da probabilidade em espaços de medida e consolidar os teoremas de integração e convergência empregados em probabilidade.
2. Definir e interpretar a esperança condicional, incluindo sua caracterização como projeção em L^2 .
3. Desenvolver a teoria de martingais, incluindo transformadas previsíveis, decomposição de Doob, tempos de parada e parada opcional.
4. Demonstrar os teoremas de convergência de Doob e estudar martingais em L^p , integrabilidade uniforme e martingais fechados.
5. Obter leis dos grandes números e teoremas-limite por métodos de martingais e funções características.
6. Introduzir desigualdades de concentração e aplicá-las a problemas probabilísticos em tempo discreto.

4. Ementa

Espaços de probabilidade e variáveis aleatórias. Independência, integração e esperança. Modos de convergência. Esperança condicional e teorema de Radon-Nikodym. Filtrações e processos adaptados. Martingais, submartingais e supermartingais. Transformadas previsíveis e decomposição de Doob. Tempos de parada e Teorema da Parada Opcional. Desigualdades maximais e de cruzamentos. Teoremas de Convergência de Doob. Martingais em L^p , integrabilidade uniforme e martingais fechados. Somas de variáveis aleatórias independentes, Lei Forte dos Grandes Números e Teorema das Três Séries. Funções características, convergência fraca e Teorema Central do Limite. Martingais exponenciais, variação quadrática e desigualdades de Azuma-Hoeffding, McDiarmid e Freedman. Aplicações selecionadas.

5. Organização do conteúdo

Unidade	Carga	Conteúdo
I. Fundamentos da probabilidade	12 h	Espaços de probabilidade; eventos; variáveis aleatórias; independência; integração e esperança; Borel-Cantelli; modos de convergência e teoremas de passagem ao limite.
II. Esperança condicional	6 h	Radon-Nikodym; definição relativamente a uma sigma-álgebra; propriedades; regra da torre; Jensen condicional; projeção em L^2 ; martingais de Doob.
III. Martingais e tempos de parada	12 h	Filtrações; martingais, submartingais e supermartingais; transformadas previsíveis; decomposição de Doob; tempos de parada; processo parado; Teorema da Parada Opcional.
IV. Convergência de martingais	9 h	Desigualdades maximais e de cruzamentos; convergência quase certa e em L^p ; ortogonalidade de incrementos; integrabilidade uniforme; martingais fechados.
V. Somas independentes e teoremas-limite	9 h	Diferenças de martingais; Lei Forte dos Grandes Números; Teorema das Três Séries; funções características; convergência fraca; Teorema Central do Limite.
VI. Concentração via martingais	6 h	Martingais exponenciais; variação quadrática; desigualdades de Azuma-Hoeffding, McDiarmid e Freedman; exemplos probabilísticos.
VII. Aplicações selecionadas	6 h	Processos de ramificação; ruína do jogador; passeios aleatórios e funções harmônicas; urnas de Pólya; tópicos de filtragem, finanças discretas ou aproximação estocástica.

6. Metodologia e avaliação

As aulas serão expositivas, com ênfase em definições precisas, exemplos estruturais e demonstrações completas. Listas de exercícios acompanharão cada unidade e integrarão a avaliação. Ao término da terceira unidade, correspondendo aproximadamente à metade da carga horária, será realizada uma prova escrita individual, abrangendo fundamentos de probabilidade, esperança condicional e a teoria inicial de martingais. A avaliação será completada por um trabalho escrito ou seminário final sobre um resultado complementar, uma aplicação ou um desenvolvimento teórico relacionado ao curso. Ilustrações computacionais poderão ser usadas de forma pontual, sempre subordinadas ao desenvolvimento matemático.

7. Exemplos e aplicações

Os exemplos serão escolhidos prioritariamente por sua função matemática: processo de Galton-Watson e probabilidade de extinção; ruína do jogador e tempos de chegada; passeios aleatórios e funções harmônicas; urnas de Pólya; atualização bayesiana e martingais de Doob. Conforme o andamento da turma, serão incluídos tópicos de filtragem, finanças em tempo discreto ou aproximação estocástica.

8. Bibliografia

1. WILLIAMS, D. *Probability with Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. Texto principal.
2. DURRETT, R. *Probability: Theory and Examples*. 5. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.
3. SCHILLING, R. L. *Measures, Integrals and Martingales*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
4. GRIMMETT, G.; STIRZAKER, D. *Probability and Random Processes*. 4. ed. Oxford: Oxford University Press, 2020.
5. BOUCHERON, S.; LUGOSI, G.; MASSART, P. *Concentration Inequalities*. Oxford: Oxford University Press, 2013.

Observação de escopo. O curso concentra-se em martingais em tempo discreto. Movimento browniano, cálculo de Itô e equações diferenciais estocásticas não integram a ementa; poderão ser mencionados apenas como indicação de continuidade natural da formação.